Відкрита студентська Олімпіада з математики
КПІ імені Ігоря Сікорського
I тур
20 січня 2021 року
Категорія А, старші курси

1. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 \frac{\{4042x\}}{\{2021x\}}\,\mathrm{d}x,$$

де фігурними дужками позначено дробову частину.

2. Знайти всі комплекснозначні диференційовні функції $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, що задовольняють задачу Коші

$$\begin{cases} z'(t) = z(t) \cdot \overline{z}(t), \\ z(0) \;= \mathrm{i}. \end{cases}$$

3. Послідовність $(b_n, n \geq 0)$ задано рекурентним співвідношенням

$$b_{n+2} = \frac{b_{n+1}}{b_n + b_n b_{n+1}}$$

з початковими умовами $b_0 = 20$, $b_1 = 21$. Визначити область збіжності та суму степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

4. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \leq 9} \sin(x^2)\cos(y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

5. У просторі на відстані одна від одної розташовано дві кулі з центрами O_1 та O_2 і радіусами R_1 та R_2. Де на відрізку O_1O_2 (але зовні куль) потрібно встановити джерело світла, щоб сумарна площа освітлених частин обох сфер набула максимального значення? Відповідь подати у вигляді відношення, в якому точка розташування джерела має ділити відрізок O_1O_2.

6. Для натуральних чисел i та j позначимо через $\sigma_{i,j}$ суму величин, обернених до їх спільних дільників:

$$\sigma_{i,j} = \sum_{i,j \,\vdots\, d} \frac{1}{d}.$$

Наприклад, $\sigma_{8,12} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \dots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \dots & \sigma_{n,n} \end{vmatrix}.$$